PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On désigne par B l'espace vectoriel des fonctions f à valeurs complexes de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, bornées sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes leurs dérivées successives $f^{(n)}$. Pour toute fonction g à valeurs complexes continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on pose $N_\infty(g) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)|$.

On note $\mathscr{P}$ le sous-espace de B constitué des fonctions 2π-périodiques.

On note $\mathscr{A}_+$ l'ensemble des suites $(M_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels strictement positifs qui satisfont aux conditions suivantes :

(1) $$M_0 = 1 \qquad M_n^2 \leqslant M_{n-1} M_{n+1} \text{ si } n \geqslant 1 .$$

Pour tout élément $A = (M_n)$ de $\mathscr{A}_+$, on note B(A) le sous-espace vectoriel de B constitué des fonctions f pour lesquelles il existe deux nombres réels strictement positifs γ et c (dépendant de f) tels que, pour tout $n \geqslant 0$,

(2) $$N_\infty(f^{(n)}) \leqslant \gamma\, c^n M_n .$$

On considère enfin l'application linéaire T de B dans l'espace $\mathscr{S}$ de toutes les suites de nombres complexes définies par la relation :

(3) $$T(f) = (f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots).$$

L'objectif du problème est d'étudier l'injectivité de T et de ses restrictions à certains sous-espaces vectoriels du type B(A).

I. Exemples d'espaces du type B (A)

1. *Étude du sous-espace vectoriel* B (A).

Soit $A = (M_n)$ un élément de $\mathscr{A}_+$.

a. Vérifier que B (A) est un sous-espace vectoriel de B.

b. Établir que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite $(M_k M_{n-k})_{0\leqslant k\leqslant [\frac{n}{2}]}$, où $\left[\frac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$, est décroissante. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, $M_k M_{n-k} \leqslant M_n$.

En conclure que B(A) est une sous-algèbre de B ; à cet effet, on pourra utiliser la formule de Leibniz.

c. Soient λ et d deux nombres réels, $\lambda \neq 0$, et f un élément de B(A).

Montrer que l'application $g : x \longmapsto f(\lambda x + d)$ appartient à B(A).

2. *Comparaison de deux sous-espaces.*

Soient $A = (M_n)$ et $A' = (M'_n)$ des éléments de $\mathscr{A}_+$. On suppose qu'il existe des nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $M'_n \leqslant \alpha\, \beta^n M_n$.

Prouver que B(A') est contenu dans B(A).

3. *Étude de* B (1). Lorsque $A = (M_n)$, où, pour tout $n \geqslant 0$, $M_n = 1$, B (A) est noté plus simplement B (1).

a. Soit β un nombre réel strictement positif. Montrer que la suite $A = (\beta^n)$ appartient à $\mathscr{A}_+$ et que $B(A) = B(1)$.

Tournez la page S.V.P.

b. Soit $A = (M_n)$ un élément quelconque de $\mathscr{A}_+$.

Prouver que la suite $\left(\frac{M_n}{M_{n-1}}\right)$ est croissante. En déduire que B (1) est contenu dans B (A).

c. Pour tout nombre réel $\omega > 0$, on note e_ω la fonction définie sur R par $e_\omega(x) = e^{i\omega x}$.

Prouver que e_ω appartient à B (1).

d. Prouver que $\mathscr{P} \cap B(1)$ est réduit au sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques. À cet effet, on établira que si f appartient à $\mathscr{P}$, les coefficients de Fourier

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt, \tag{4}$$

où n appartient à Z, sont liés à ceux de $f^{(p)}$ par la relation

$$\alpha_n(f^{(p)}) = (in)^p\, \alpha_n(f); \tag{5}$$

on prouvera ensuite que si f appartient à $\mathscr{P} \cap B(1)$, les coefficients de Fourier de f sont nuls dès que $|n|$ est assez grand, en majorant $|\alpha_n(f)|$ en fonction de $N_\infty(f^{(p)})$ grâce à (5).

II. Étude du sous-espace B (n!)

1. *Injectivité de T sur B (n!).*

a. Montrer que la suite $A = (n!)_{n>0}$ appartient à $\mathscr{A}_+$.

b. Soit g un élément de $B(n!)$. On suppose qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $g^{(n)}(a) = 0$. Établir, en utilisant une formule de Taylor convenable, qu'il existe des nombres réels γ et c strictement positifs tels que, pour tout nombre réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$|g(x)| \leqslant \gamma\, c^n\, |x - a|^n.$$

En conclure que, si x appartient à $\left]a - \frac{1}{c},\ a + \frac{1}{c}\right[$, $g(x) = 0$.

c. Soit maintenant f un élément de $B(n!)$ tel que $T(f) = 0$. À l'aide de *b.* et de I.1.*c.*, montrer que $f = 0$. En conclure que la restriction de T au sous-espace vectoriel B (n!) est injective.

2. *Exemples de fonctions appartenant à* B (n!).

a. Soit $u = a + ib$ un nombre complexe non réel. Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x - u}$ appartient à B (n!).

b. En déduire que toute fonction rationnelle $x \longmapsto R(x)$ à valeurs complexes, sans pôle réel et de degré strictement négatif appartient à B (n!).

3. *Caractérisation des éléments de* B (n!) *parmi les fonctions développables en série entière.*

Soit S la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, définie pour tout élément z de C par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n z^n$, où λ_n appartient à C.

Étant donné un nombre réel a et un nombre réel R strictement positif, on note f_a la fonction définie sur R par $f_a(\theta) = S(a + Re^{i\theta})$.

a. Montrer que l'application $f_0 : \theta \longmapsto S(Re^{i\theta})$ est un élément de $\mathscr{P}$. Que vaut le coefficient de Fourier $\alpha_n(f_0)$? En déduire que, pout tout $n \geqslant 0$,

$$|\lambda_n| \leqslant \frac{M(R)}{R^n}, \quad \text{où} \quad M(R) = \sup_{|z| = R} |S(z)|. \tag{6}$$

Tournez la page S.V.P.

b. Prouver que, pour tout nombre réel a tel que $|a| < R$ et pour tout entier $p \geqslant 0$,

(7) $$|S^{(p)}(a)| \leqslant p! \frac{R \cdot M(R)}{(R-a)^{p+1}}.$$

Pour cela on dérivera p fois terme à terme la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n$, et on utilisera la majoration (6).

c. Soit a un nombre réel. Montrer que la série de Taylor de S au point a converge vers S, c'est-à-dire que, pour tout nombre réel x,

(8) $$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(On pourra utiliser la formule de Taylor au point a et majorer le reste grâce à (7), en choisissant R convenablement.)

d. Soit g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_a(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(a)}{n!} R^n e^{in\theta}$. Justifier la convergence de cette série.

Montrer que $g_a = f_a$. (On comparera les coefficients de Fourier de ces fonctions.)

e. On suppose que S appartient à $B(n!)$. Prouver qu'il existe un nombre réel β strictement positif tel que la fonction $z \longmapsto S(z)$ soit bornée sur la bande constituée des nombres complexes z tels que $|Im(z)| < \beta$.

Réciproquement, prouver que si S satisfait à cette condition, S appartient à $B(n!)$.

f. Prouver que la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ appartient à $B(n!)$.

III. Étude du sous-espace $B((n!)^2)$

1. *Non-injectivité de T sur B.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0.$$

a. Prouver que, pour tout entier $k \geqslant 0$ et pour tout $x > 0$, $f^{(k)}(x)$ est de la forme

$$f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right),$$

où P_k est un polynôme dont on précisera le degré.

b. En déduire que f est un élément de B.

c. Prouver que f appartient au noyau de T.

2. *Expression des dérivées successives de f sous forme de coefficients de Fourier.*

a. Prouver que, pour $k \geqslant 0$ et $x > 0$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k}{x^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} n(n+1) \dots (n+k-1) \frac{1}{x^n}.$$

Pour cela, on développera f en série et on montrera que l'on peut dériver terme à terme.

b. Étant donné $x > 0$, soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$g(\theta) = \exp\left(-\frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{i\theta}} \right).$$

Prouver que g appartient à $\mathscr{P}$. Prouver que les coefficients de Fourier de g satisfont aux relations :

$$\alpha_k(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x^n} I_n, \quad \text{où} \quad I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} e^{i\theta}\right)^{-n} e^{-ki\theta} \, d\theta.$$

c. Calculer l'intégrale I_n en développant $\left(1 + \frac{1}{2} u\right)^{-n}$ en série entière de u.

d. Prouver finalement que, si $x > 0$,

(9) $$\alpha_k(g) = 0 \quad \text{si} \quad k < 0 \quad \text{et} \quad \alpha_k(g) = \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \text{ si } k \geqslant 0.$$

3. *Majoration des dérivées successives de f.*

a. Prouver que pour tout nombre réel θ,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{i\theta}} \right) \geqslant \frac{2}{3}.$$

(On pourra poser $\cos\theta = v$ et évaluer l'expression considérée en fonction de v).

b. En déduire que, pour $x > 0$,

(10) $$N_\infty(g) \leqslant \exp\left(-\frac{2}{3x}\right).$$

c. En utilisant la formule (9) et en majorant $|\alpha_k(g)|$ grâce à (10), montrer que pour $x > 0$,

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant \frac{2^k k!}{x^k} \exp\left(-\frac{2}{3x}\right).$$

d. En déduire que, pour $k \geqslant 0$,

$$N_\infty(f^{(k)}) \leqslant 3^k (k!)^2.$$

e. Prouver finalement que la restriction de T à $B((n!)^2)$ n'est pas injective.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail